

1.8.8 Rozklad mnohočlenů na součin III

Předpoklady: 010807

Př. 1: Zjednoduš $(2x-1)^3 - (2x+1)(3x-2)$.

$$\begin{aligned}(2x-1)^3 - (2x+1)(3x-2) &= \left[(2x)^3 - 3(2x)^2 + 3 \cdot 2x - 1 \right] - (6x^2 - 4x + 3x - 2) = \\ &= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (6x^2 - x - 2) = 8x^3 - 18x^2 + 7x + 1\end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Hodinu dělím přibližně na poloviny, dvacet minut je minimum na vysvětlení a procvičení rozkladu mnohočlenů $x^2 + px + q$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je samozřejmě opakování zcela základních faktů, které by všichni měli znát. Realita ovšem taková není, bod a) je většinou v pořádku, ale v bodu b) jen menšina žáků napíše, že rozklad není možný, většina udělá jednu z chyb, které využijeme v následujícím příkladu.

Př. 2: Rozlož na součin mnohočleny.

a) $a^2 - b^2$

b) $a^2 + b^2$

a) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

b) $a^2 + b^2 = \text{nelze}$

Př. 3: Zdůvodni, proč následující rozklady nemohou být správné.

a) $a^2 + b^2 = (a+b)(a+b)$

b) $a^2 + b^2 = (a-b)(a-b)$

c) $a^2 + b^2 = [a+(-b)][a-(-b)]$

a) $a^2 + b^2 = (a+b)(a+b)$

Víme, že platí $(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq (a+b)(a+b)$

b) $a^2 + b^2 = (a-b)(a-b)$

Víme, že platí $(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq (a-b)(a-b)$

c) $a^2 + b^2 = [a+(-b)][a-(-b)]$

Víme, že platí $[a+(-b)][a-(-b)] = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \Rightarrow$

$a^2 + b^2 \neq [a+(-b)][a-(-b)]$

Pedagogická poznámka: Rozebrání chyb je dobré provést i s těmi, kteří si pamatují, že mnohočlen $a^2 + b^2$ rozložit nelze. Zdůrazňuji, že matematicky uvažující lidé se od ostatních odlišují právě tím, že o všem, co napíšou, podobným způsobem přemýšlejí.

Existují i vzorce pro rozklad některých mnohočlenů s třetími mocninami. Jak si vzorce pamatovat?

Př. 4: Odhadni co nejpřesněji, jaké mnohočleny budou vystupovat v následujících vzorcích v prázdných závorkách. Odhady ověř výpočtem.

a) $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (\quad)$ b) $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (\quad)$

V obou bodech platí, že závorka musí obsahovat:

- člen a^2 (aby po roznásobení s a z první závorky vznikl člen a^3)
- člen b^2 (aby po roznásobení s b z první závorky vznikl člen b^3)
- další člen ab , který se roznásobí se závorkou, aby odečetl členy a^2b a b^2a .

Odhad můžeme potvrdit dělením.

$$\begin{array}{r} (a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2 \\ \underline{-(a^3 + a^2b)} \\ -a^2b + b^3 \\ \underline{-(a^2b - ab^2)} \\ ab^2 + b^3 \\ \underline{-(ab^2 + b^3)} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2 \\ \underline{-(a^3 - a^2b)} \\ a^2b - b^3 \\ \underline{-(a^2b - ab^2)} \\ ab^2 - b^3 \\ \underline{-(ab^2 - b^3)} \\ 0 \end{array}$$

Další vzorce pro rozklad mnohočlenů:

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Pedagogická poznámka: Ptám se studentů, jestli už první ze vzorců náhodou neviděli. Je zajímavé, kdo si vzpomene, že před týdnem šlo o poslední příklad na dělení mnohočlenů. Dělení mnohočlenů může být v situaci, kdy známe jeden z mnohočlenů, na které máme rozkládat (například při krácení), další metodou.

Př. 5: Rozlož pomocí vzorce na součin mnohočleny.

a) $x^3 + 8$ b) $x^3 - 1$

a)
$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2) \cdot (x^2 - x \cdot 2 + 2^2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

b)
$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1) \cdot (x^2 + x \cdot 1 + 1^2) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Př. 6: Rozlož na součin mnohočleny.

a) $27x^3 - 1$

b) $x^6 + 1$

c) $x^6 - 1$

$$a = 3x, b = 1$$

a) $27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1) \cdot [(3x)^2 + 3x \cdot 1 + 1^2] = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$

$$a = x^2, b = 1$$

b) $x^6 + 1 = (x^2)^3 + 1 = (x^2 + 1) \left[(x^2)^2 - x^2 + 1 \right] = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

$$a = x^2, b = 1$$

c) $x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1) \left[(x^2)^2 + x^2 + 1 \right] = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$

Můžeme postupovat i jinak.

$$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Výsledky vypadají jinak, zkusíme roznásobením, zda jsou stejné.

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^4 + x^2 + 1$$

$\Rightarrow$ první výsledek není ještě hotový $\Rightarrow$ budeme se ještě muset moc a moc učit.

Pedagogická poznámka: Stejně jako v podobných situacích i v bodě a) je první radou, aby si studenti upravili výraz do tvaru $27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3$. Většina z nich to sama nedělá.

Druhý způsob řešení bodu c) většinou nikoho nenapadne $\Rightarrow$ napíši začátek na tabuli a nechám je dopočítat řešení. Problémy jsou v druhém kroku, kdy žáci musí použít najednou oba vzorce.

Rozklad mnohočlenů $x^2 + px + q$

Například mnohočlen: $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$. Jak jsme na rozklad přišli?

Zkusíme si zpětně roznásobit předchozí rozklad a sledovat, jak vzniknou členy v mnohočlenu.

$$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 2x + 1 \cdot x + 2 \cdot 1 = x^2 + (2 + 1)x + 2 \cdot 1$$

$$(x + r)(x + s) = x^2 + s \cdot x + r \cdot x + s \cdot r = x^2 + (s + r)x + r \cdot s$$

Máme trojčlen $x^2 + px + q$ a chceme ho rozložit na součin $(x + r)(x + s) \Rightarrow$ známe čísla p a q a chceme najít čísla $r, s \Rightarrow$ porovnáme dva zápisy mnohočlenu:

$$x^2 + px + q = x^2 + (s + r)x + r \cdot s \Rightarrow s + r = p \text{ a } r \cdot s = q = \text{hledáme čísla, která po vynásobení dají } q \text{ a po sečtení } p.$$

Konkrétně: Rozkládáme mnohočlen $x^2 + 4x + 3 \Rightarrow$ hledáme čísla, která po vynásobení dají 3 a po sečtení 4 $\Rightarrow r = 3; s = 1 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad ještě řeším napůl na tabuli, příklad 7 pak řeší žáci zcela sami. Těm, kteří si nejsou jistí, doporučuji v příkladu 6 psát poznámky typu: „hledám čísla se součinem 10 a součtem 7“.

Př. 7: Rozlož na součin mnohočlen.

a) $x^2 + 7x + 10$

b) $x^2 - 2x - 3$

c) $x^2 + x + 4$

a) $x^2 + 7x + 10$

Hledáme čísla, jejichž součet je 7 a součin 10. Možnosti pro součin 10: $1 \cdot 10$ nebo $2 \cdot 5$, platí $5 + 2 = 7 \Rightarrow x^2 + 7x + 10 = (x + 2) \cdot (x + 5)$.

b) $x^2 - 2x - 3$

Hledáme čísla, jejichž součet je -2 a součin -3. Možnosti pro součin -3: $(-3) \cdot 1$ nebo $(-1) \cdot 3$, platí $-3 + 1 = -2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = (x - 3) \cdot (x + 1)$.

c) $x^2 + x + 4$

Hledáme čísla, jejichž součet je 1 a součin 4. Možnosti pro součin 4: $1 \cdot 4$, platí $4 + 1 = 5 \Rightarrow$ touto metodou nedokážeme mnohočlen rozložit.

Př. 8: Rozlož na součin následující trojčleny:

a) $x^2 + 9x + 20$

b) $x^2 - x - 6$

c) $x^2 + 3x - 18$

d) $x^2 + 17x + 30$

e) $x^2 - 2x + 6$

f) $x^2 - 5x + 6$

g) $x^2 + 8x + 16$

h) $x^2 - 8x + 12$

i) $x^2 + 3x - 70$

a) $x^2 + 9x + 20 = (x + 5) \cdot (x + 4)$

b) $x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$

c) $x^2 + 3x - 18 = (x + 6) \cdot (x - 3)$

d) $x^2 + 17x + 30 = (x + 2) \cdot (x + 15)$

e) $x^2 - 2x + 6 =$ nelze, číslo 6 můžeme získat buď jako $1 \cdot 6 = 6$ nebo $2 \cdot 3 = 6$. Ani z jedné dvojice těchto čísel nelze po součtu získat $-2 \Rightarrow$ nelze vytvořit rozdíl z celých čísel.

f) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$

g) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4) \cdot (x + 4)$

h) $x^2 - 8x + 12 = (x - 6) \cdot (x - 2)$

i) $x^2 + 3x - 70 = (x - 7) \cdot (x + 10)$

$x^2 + px + q = x^2 + (s + r)x + r \cdot s \Rightarrow s + r = p$ a $r \cdot s = q$ = hledáme čísla, která po vynásobení dají q a po sečtení p .

Dodatek: Jak hledat čísla do rozkladu u větších koeficientů. Když rozkládáme například trojčlen $x^2 + 6x - 720 = 0$ hledáme dvě čísla jejich součin je 720 a jejich hodnoty se liší o 6 (součin -720 získáme tak, že vynásobíme čísla s opačným znaménkem, velikost jejich součtu se tedy rovná velikosti rozdílu jejich velikostí). První nástřel: $720 = 72 \cdot 10$, čísla mají příliš velký rozdíl $\Rightarrow$ větší číslo zmenšíme a menší zvětšíme tím, že si je obě rozložíme na součin a jedno z čísel přesuneme od většího k menšímu: $720 = 2 \cdot 36 \cdot 10 = 36 \cdot 20$. Rozdíl mezi čísly je stále příliš velký, další pokus s větším číslem, které můžeme vytknout z 72: $720 = 3 \cdot 24 \cdot 10 = 24 \cdot 30$. To přesně hledáme.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je BONUS, proto jej v hodině nepočítáme ani jeho výsledky v dalších hodinách nepoužíváme. Je určen pouze pro mimořádně nadané.

Př. 9: BONUS: Pokus najít postup, kterým je možné rozložit trojčlen ve tvaru $ax^2 + px + q$ na součin $(ax + b)(x + c)$.

Zkusíme postupovat podobně u hledání rozkladů pro trojčlen $x^2 + px + q \Rightarrow$

Roznásobíme závorky rozkladu: $(ax + b)(x + c) = ax^2 + acx + bx + bc = ax^2 + (ac + b)x + bc$

Porovnáme obě vyjádření:

$$\begin{array}{rcl} ax^2 + & px + & q \\ ax^2 + (ac + b)x + bc \end{array}$$

Velmi podobná situace: hledáme dvojici čísel ac a b , jejichž součet $ac + b$ odpovídá koeficientu p u nerozloženého trojčlenu a jejichž součin abc odpovídá součinu $a \cdot q$ u nerozloženého trojčlenu $ax^2 + px + q$.

Ověření postupu na příkladu trojčlenu $3x^2 + 10x + 3$.

Určíme součin aq : $3 \cdot 3 = 9$.

Hledáme dvě čísla, jejichž součet se rovná 10 a součin 9 $\Rightarrow$ jde o čísla $ac = 9$ a $b = 1$.

Protože již víme, že platí $a = 3$, platí i $c = 3$. Hledaný součin je tedy

$$(ax + b)(x + c) = (3x + 1)(x + 3).$$

Zkouška roznásobením: $(3x + 1)(x + 3) = 3x^2 + 9x + x + 3 = 3x^2 + 10x + 3$.

Shrnutí: $x^2 + 9x + 20 = (x + 5) \cdot (x + 4) \Rightarrow$ do závorek hledáme k x čísla, která po vynásobení dají 20 a po sečtení 9.